Провести классификацию следующих уравнений:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = e^{-kt}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} = 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

1. Напишите конечно-разностные соотношения «назад», «вперед» и центральное для следующих производных:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} = \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta y}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta y}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y}$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} + f_{i-1,j} - 2f_{i,j}}{\Delta x^2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{\Delta y^2}$$

Самостоятельно:

Напишите центральные конечно-разностные соотношения для следующих уравнений:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho \upsilon}{\partial y} = 0$$

- уравнение неразрывности

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \upsilon \frac{\partial u}{\partial y} = F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

- уравнение движения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

- невязкое уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

- уравнение Кортевега де Вриза

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k^2 u = 0$$

- уравнение Гельмгольца

Ответьте на вопросы:

1. Какое ДУ является линейным?

2. Какое ДУ является однородным?

3. Как определяется порядок ДУ?

4. Какие типы ДУ II порядка Вы знаете?

5. Чем отличается равномерная сетка от неравномерной?

6. Что такое «сеточная функция»?

7. Что такое «конечно-разностная схема»?

8. Что такое «шаблон»?

Получите конечно-разностное соотношение для смешанной производной:

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1} + f_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y}$$

$$f_{i+1,j+1} = f_{i,j} + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} \Delta y + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{i,j} \Delta y^2 + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} \Delta x \Delta y \qquad (1)$$

$$f_{i+1,j-1} = f_{i,j} + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} \Delta x - \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} \Delta y + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{i,j} \Delta y^2 - \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} \Delta x \Delta y \qquad \textbf{(2)}$$

$$f_{i-1,j+1} = f_{i,j} - \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} \Delta y + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{i,j} \Delta y^2 - \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} \Delta x \Delta y \qquad \textbf{(3)}$$

$$f_{i-1,j-1} = f_{i,j} - \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} \Delta x - \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} \Delta y + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x^2 + $$

$$+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{i,j} \Delta y^2 + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} \Delta x \Delta y \qquad (4)$$

$$f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} = 2\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{i,j} \Delta y + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\bigg|_{i,j} \Delta x \Delta y \qquad \textbf{(5)}$$

$$f_{i-1,j-1} - f_{i-1,j+1} = -2\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{i,j} \Delta y + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\bigg|_{i,j} \Delta x \Delta y \qquad \textbf{(6)}$$

(5)+(6):

$$f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} + f_{i-1,j-1} - f_{i-1,j-1} = 4\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\bigg|_{i,j} \Delta x \Delta y$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\bigg|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1} + f_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y}}$$

$$f_{i+1,j+1} = f_{i,j} + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} \Delta y + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x^2 + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{i,j} \Delta y^2 + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} \Delta x \Delta y \quad (1)$$

$$f_{i+1,j-1} = f_{i,j} + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} \Delta x - \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} \Delta y + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x^2 + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{i,j} \Delta y^2 - \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} \Delta x \Delta y \quad (2)$$

$$f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} = 2\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} \Delta y + 2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} \Delta x \Delta y \quad (5)$$

$$f_{i-1,j+1} = f_{i,j} - \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} \Delta y + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x^2 + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{i,j} \Delta y^2 - \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} \Delta x \Delta y \quad (3)$$

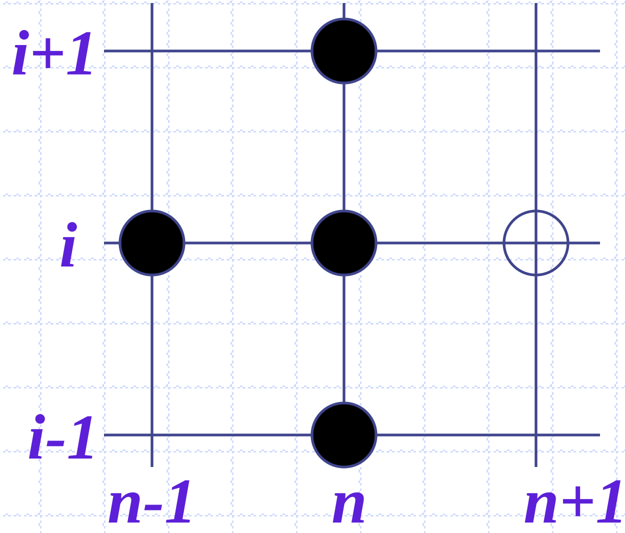
$$f_{i-1,j-1} = f_{i,j} - \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} \Delta x - \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} \Delta y + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x^2 + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{i,j} \Delta y^2 + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} \Delta x \Delta y \quad (4)$$

$$f_{i-1,j-1} - f_{i-1,j+1} = -2\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} \Delta y + 2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} \Delta x \Delta y \quad (6)$$

Постройте , используя центральные разности, конечно-разностную схему и изобразите ее шаблон для следующего уравнения:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + u_i^n \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$



(СЗ №7) сем. занятие. Методы представления дифференциальных уравнений в конечных разностях.

- Разложите в ряд Тейлора :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 9\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - e^{xy} = 0$$

(СЗ №8) сем. занятие.

- Используя полином третьего порядка, получить методом полиномиальной аппроксимации конечно-разностные соотношения для третьей производной:

$$\left.\frac{\delta^3 f}{\delta x^3}\right|_i = \frac{3f_{i-1} - 3f_i + f_{i+1} - f_{i-2}}{\Delta x^3}$$

(СЗ №9) Сем. занятие. Методы представления дифференциальных уравнений в конечных разностях.

- Метод контрольного объема

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 9\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - e^{xy} = 0$$

- Рассмотреть функцию e^x. Определить на сетке с шагом Δx=0,1 производную $f'(x)$ при x=2, используя разности “вперед”, “назад” и “центральные”. Сравнить полученные результаты с точным значением производной. Повторить вычисления при Δx=0,2. Проанализировать полученный результат

(СЗ №10) Сем. занятия. Исследовать на устойчивость методом малых возмущений

Следующие конечно-разностные уравнения:

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + u\,\frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$

$$f_i^{n+1} = \frac{1}{2}\left(f_{i+1}^n + f_{i-1}^n\right) - \frac{C}{2}\left(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n\right)$$

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} = \nu\,\frac{f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2 f_i^n}{\Delta x}$$

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + u\,\frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta x} = 0$$

(СЗ №11) Сем. занятия.
Исследовать на устойчивость методом фон Неймана следующие конечно-разностные уравнения:

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + u\frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + u\frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + u\frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + u\frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$

$$f_i^{n+1} = \frac{1}{2}\left(f_{i+1}^n + f_{i-1}^n\right) - \frac{C}{2}\left(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n\right)$$

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} = \nu\frac{f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n}{\Delta x}$$

(СЗ №12) Сем. занятия.

Составить алгоритм расчета волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

по явным схемам Лакса-Вендроффа, Русанова, "чехарда".

(СЗ №13) Сем. занятия.

Составить алгоритм расчета уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

по явным схемам Мак-Кормака, Лакса-Вендроффа, “чехарда”.

(СЗ №14) Сем. занятия.

1. Составить алгоритм расчета волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

по неявным схемам Кранка-Николсона, Дюфорта-Франкела.

2. Составить алгоритм расчета уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

по неявным схемам Кранка-Николсона, Дюфорта-Франкела.

(СЗ №15) Сем. занятия.

Контрольная работа, включающая следующие темы:

- Методы исследования конечно-разностных схем на устойчивость и сходимость: метод малых возмущений, метод фон Неймана, практический метод.
- Алгоритм расчета волнового уравнения, уравнения теплопроводности по явным схемам: Лакса-Вендроффа, Мак-Кормака, Русанова, “чехарда” и по неявным схемам Кранка-Николсона, Дюфорта-Франкела.